

La Pyramide de Chine

Une histoire de maçons et de parallélisme...

Cette activité est inspirée d'une partie d'un cours d'architectures et systèmes des calculateurs parallèles par François Pellegrini¹.

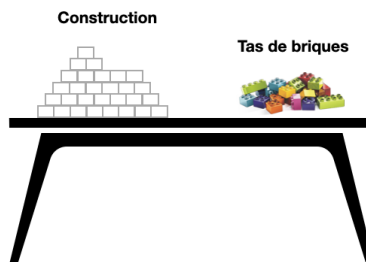
Public

Cette activité est recommandée pour des élèves de collège et lycée.

Matériel

Pour cette activité, vous aurez besoin de cubes en bois ou de carrés de sucre de deux couleurs différentes qui formeront un *tas de briques*. Les briques seront positionnées sur la même table que la construction d'une façade de la Pyramide.

Mise en place de la salle :



Vous avez également à votre disposition plusieurs fiches.

Contexte

Remontons le temps jusqu'en l'an -51 lorsque la reine Cléopâtre règne sur l'Égypte. Afin de restaurer la grandeur de l'Égypte face à l'empire romain, Cléopâtre ordonne la construction d'une pyramide. Pour réaliser cette tâche, elle fait appel à Numérobis, son meilleur maçon. Elle lui demande d'utiliser des briques colorées qui ont la particularité d'être jolies mais très lourdes. N'ayant pas de couleur préférée, elle laisse Numérobis libre sur le choix des deux couleurs. La seule contrainte imposée par Cléopâtre est de réaliser la pyramide le plus rapidement possible.

1. <ftp://ftp-developpez.com/pellegrini/parallélisme/calculateur/calculateurs-paralleles.pdf>

Devant l'ampleur de la tâche, Numérobis demande à son ami Numérobisbis de l'aider. A deux, ils pourront travailler en parallèle et avancer plus vite. Cléopâtre charge Pénaltix, son maître des pénalités, de vérifier l'évolution de la construction.

Principe

Se joue à trois : 2 maçons et un maître des pénalités.

Le but de l'activité est de construire une première façade de la pyramide le plus rapidement possible. Celle-ci aura 8 (4 pour les collégiens) briques pour la base, comme présenté sur le plan de construction. Les deux couleurs montrent la répartition du travail entre Numérobis et Numérobisbis. Chacun doit avoir le même nombre de briques à poser (à une brique près) et respecter les règles d'or d'un bon maçon. On suppose de plus que Numérobis pose la première brique de la façade (brique avec le numéro 1 sur le plan de construction).

Règles d'or d'un bon maçon

- Lorsqu'un maçon choisit une couleur au début de la construction, il ne travaille ensuite qu'avec des briques de cette couleur
- Le maçon qui pose la première brique, commence toujours la façade de gauche à droite.
- Un maçon qui arrive devant un tas de briques occupé par un autre maçon attend son tour pour se servir
- Un maçon doit poser au moins une brique
- Une brique est tellement lourde qu'un maçon ne peut en porter qu'une seule à la fois
- Un maçon peut poser une brique (en vert sur les schémas) si : (1) c'est la première brique à poser ou (2) la brique à sa gauche est posée ou (3) elle sera sur un étage $i+1$ et les deux briques qui sont en dessous à l'étage i sont déjà posées.



Défi 1 : Pouvez-vous dire combien il y a de briques sans les compter ? Aide : considérez dans un premier temps une façade de base 3 puis 4 puis 5,...

Pour l'animateur : faire remarquer que base=hauteur. On note $B(n)$ le nombre de briques pour une base n . On a $B(3) = 1 + 2 + 3 = 6$. $B(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = B(3) + 4 = 10$. $B(5) = B(4) + 5 = 15$.

$B(8) = 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = \sum_{i=1}^8 i = \frac{8 \times (8+1)}{2} = 36$ car on a $B(n) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n \times (n+1)}{2} = B(n-1) + n$.

Démonstration par récurrence à faire faire aux lycéens.

Le rôle du maître des pénalités

Rapidix est responsable de l'évaluation de la construction. Pour cela, il tiendra un compteur à jour. Au départ, le compteur sera égal à 0. Il sera incrémenté de 1 si on pose une brique de la même couleur qui vient d'être posée, de 0 sinon.

Défi 2 : 3..2..1.. GO !

Construisez la façade pour reproduire le motif demandé. Attention à bien respecter les règles d'or !

Défi 3 : Pouvez-vous dessiner un motif qui prendrait le plus de temps possible et un motif qui prendrait le moins de temps possible ? Faites le sur la fiche PLAN DE CONSTRUCTION. Vérifiez que vous avez bien un nombre égal de briques (à une près) par maçon. Même question si on enlève la contrainte sur le nombre

de briques par maçon.

Pour l'animateur : pires motifs : ... / meilleurs motifs : ...

Défi 4 : A votre avis, quel nombre notera le maître du temps pour ces deux motifs ?

Défi 5 : 3..2..1.. reGO !

Refaites une construction et des mesures pour votre pire et votre meilleur motifs. Comparez les résultats de Rapidix avec vos prédictions.

Défi 6 : Combien y a-t-il de motifs possibles avec une façade de n briques (sans prendre en compte que les maçons doivent poser le même nombre de briques à 1 près) ?

Pour l'animateur : 2^n . Pour chaque brique, on a deux choix possibles : blanc ou bleu.

Défi 7 : Pouvez-vous refaire l'activité avec une façade de base plus grande ?

Le coin de l'animateur

Un lien avec le parallélisme

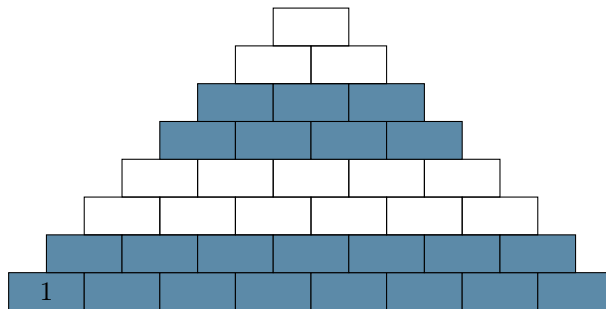
Notons que le montage de la façade en parallèle est plus rapide que le montage par un seul maçon, mais la quantité totale de travail est nécessairement plus importante, car il faut que les maçons s'organisent entre eux. L'activité entraîne quelques réflexions :

- La construction en parallèle est possible parce que les briques sont indépendantes les unes des autres.
Analogie : Pour que la résolution d'un problème en parallèle soit possible, il faut que celui-ci soit décomposé en sous-problèmes suffisamment indépendants les uns des autres pour que chaque entité puisse travailler sans perturber les autres.
- Il faut pouvoir organiser efficacement le travail à répartir entre les maçons et c'est la même chose dans les programmes. *Le découpage d'un problème influe sur les performances de la résolution de celui-ci. En plus du coût de calcul intrinsèque au problème, on génère un surcoût dû aux calculs annexes et à la communication entre agents de l'information nécessaire à la résolution du problème.*
- Comment peut-on évaluer le gain obtenu avec deux maçons comparé à un maçon ? (introduire la notion de *speedup* ?)
- Comment vérifier que la façade est bien faite ? (notions de vérification ?)

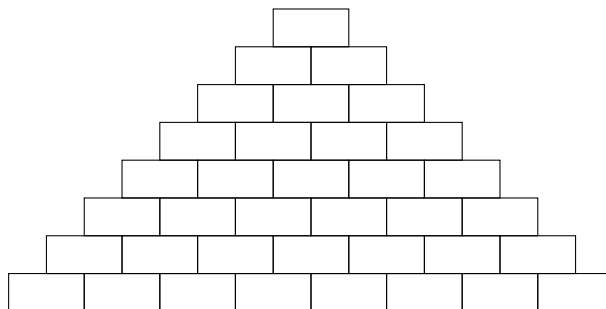
Extensions possibles de l'activité

1. Est-ce que les motifs sont généralisables ? Et si on avait une base avec n briques ?
2. Que se passe-t-il si on a 3 couleurs ? 4 couleurs ? Généralisation à n couleurs.
3. On pourrait utiliser des briques de tailles/formes différentes. Comment répartir efficacement le travail entre les maçons peut se révéler plus compliqué.

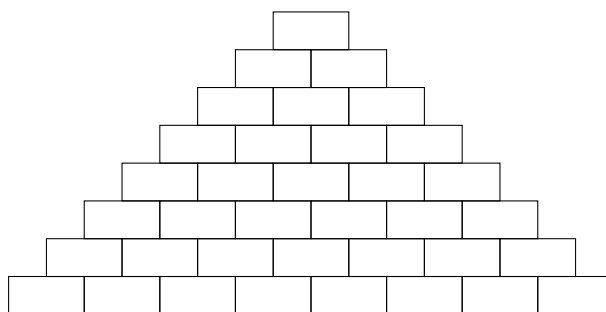
PLAN DE CONSTRUCTION POUR LES MAÇONS (Base 8)



Dessin du pire motif :

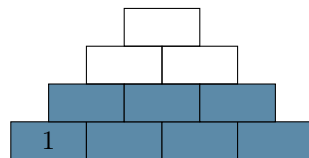


Dessin du meilleur motif :

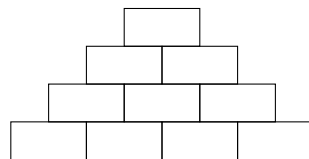


Prédictions :

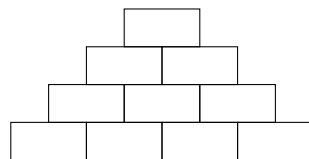
PLAN DE CONSTRUCTION POUR LES MAÇONS (Base 4)



Dessin du pire motif :



Dessin du meilleur motif :

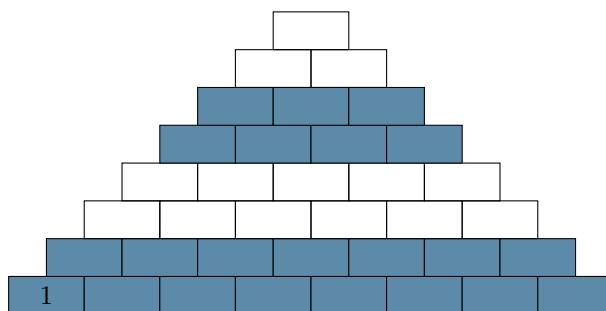


Prédictions :

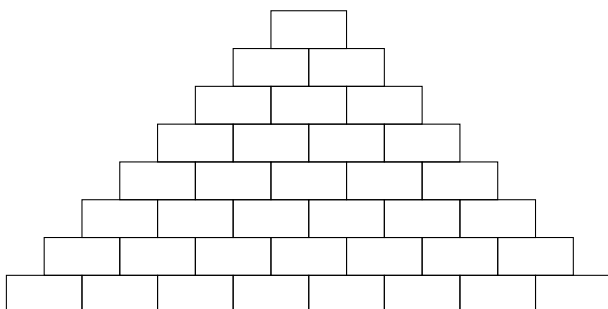
FICHE D'ÉVALUATION POUR LE MAÎTRE DES PENALITÉS (Base 8)

Motif	Compteur
Base	
Pire	
Meilleur	

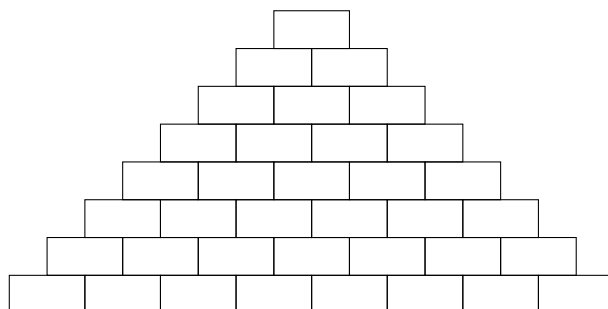
Noter, avec une croix, les briques qu'un maçon pose pendant qu'un autre maçon attend pour poser la sienne :



Pire motif :



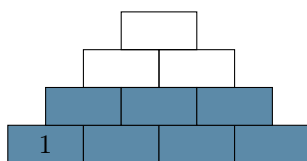
Meilleur motif :



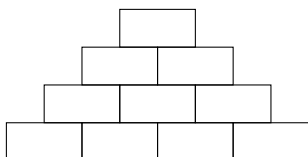
FICHE D'ÉVALUATION POUR LE MAÎTRE DES PENALITÉS (Base 4)

Motif	Compteur
Base	
Pire	
Meilleur	

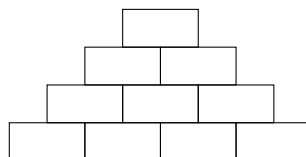
Noter, avec une croix, les briques qu'un maçon pose pendant qu'un autre maçon attend pour poser la sienne :



Pire motif :

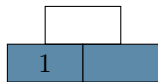


Meilleur motif :

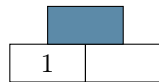


ANNEXE

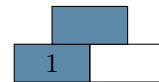
MOTIFS POSSIBLES (base 2, 2 couleurs) POUR L'ANIMATEUR



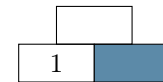
Pire motif



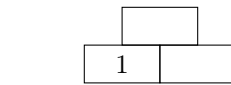
Pire motif



Meilleur motif

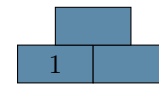


Meilleur motif



Non retenu car

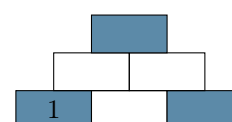
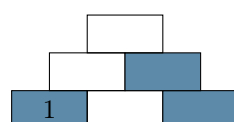
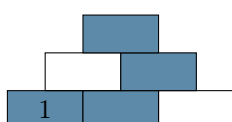
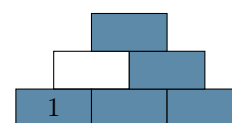
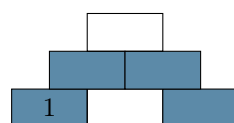
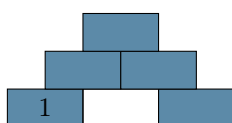
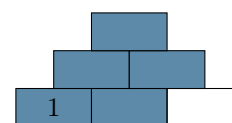
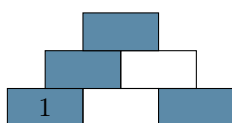
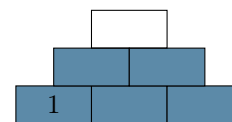
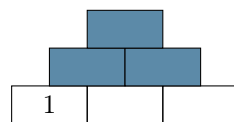
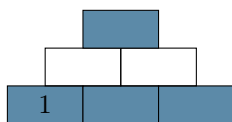
$$N_{blanc} \neq (N_{bleu} +/- 1)$$

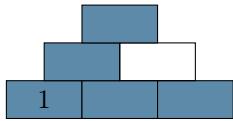
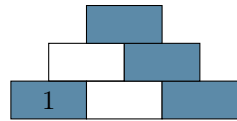
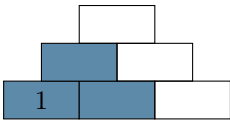
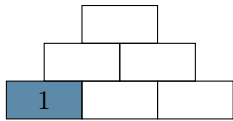


Non retenu car

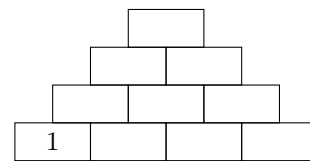
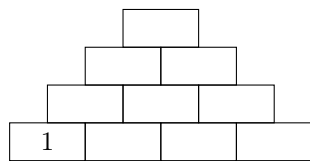
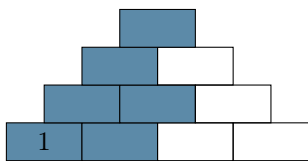
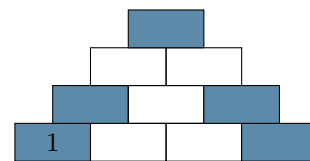
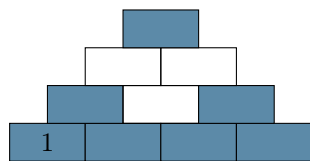
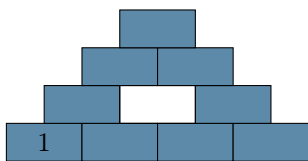
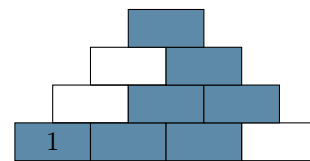
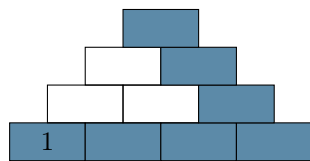
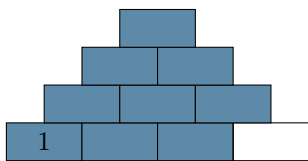
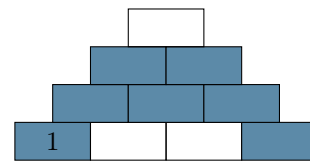
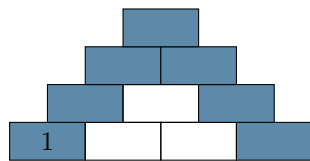
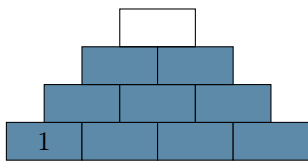
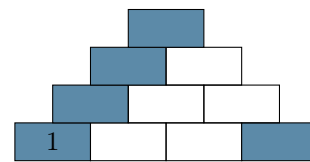
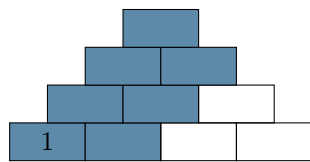
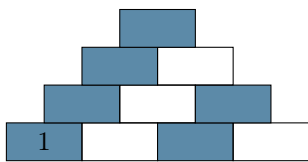
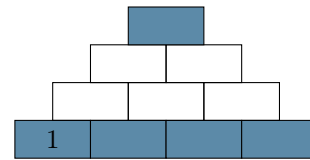
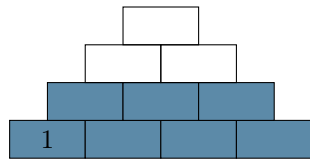
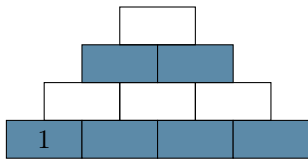
$$N_{blanc} \neq (N_{bleu} +/- 1)$$

MOTIFS POSSIBLES (base 3, 2 couleurs) POUR L'ANIMATEUR



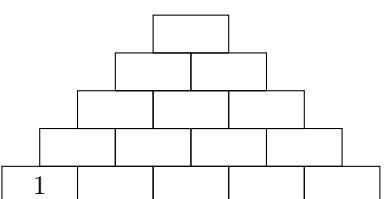
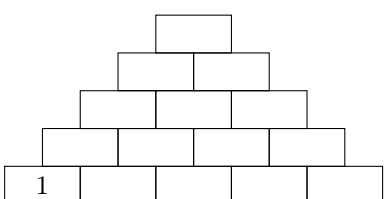
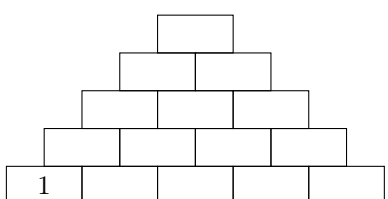
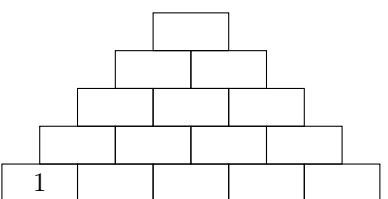
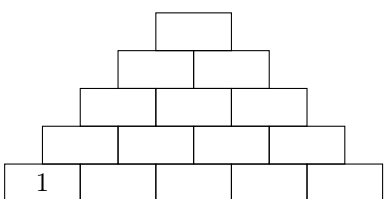
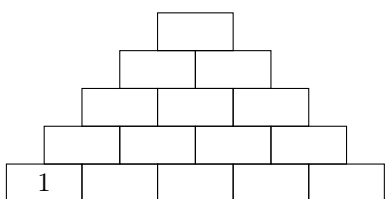
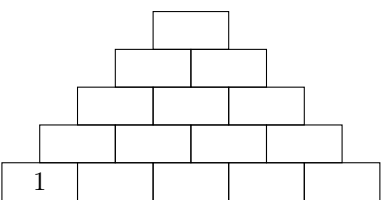
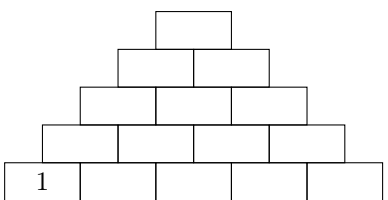
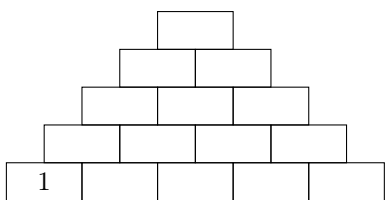
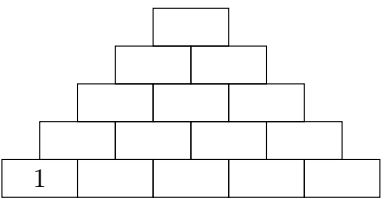
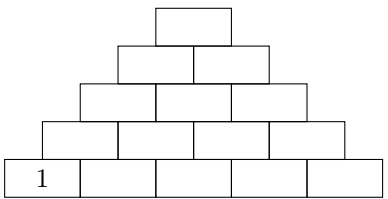
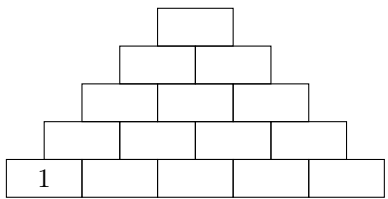
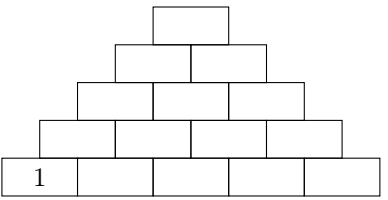
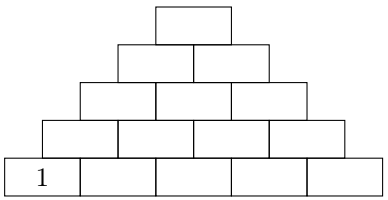
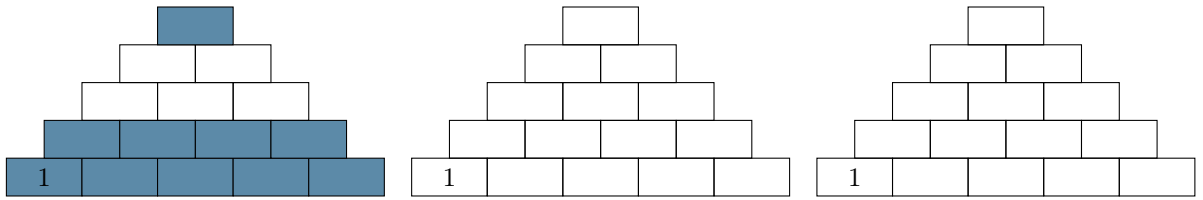


QUELQUES MOTIFS POSSIBLES (base 4, 2 couleurs) POUR L'ANIMATEUR

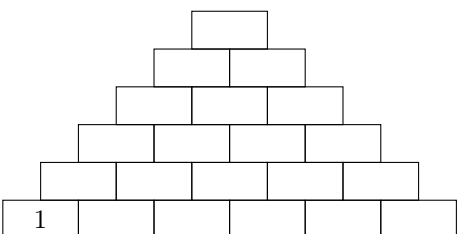
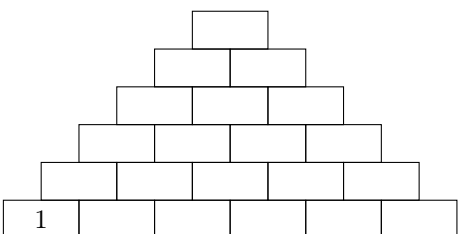
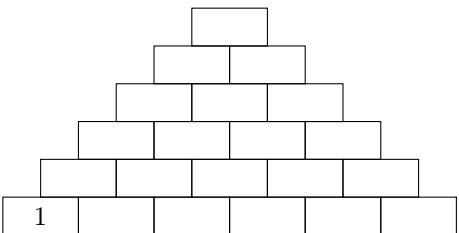
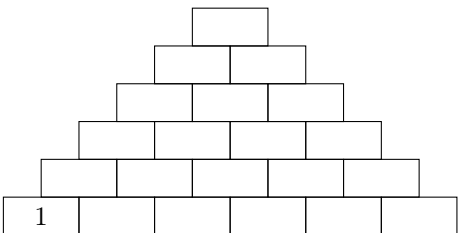
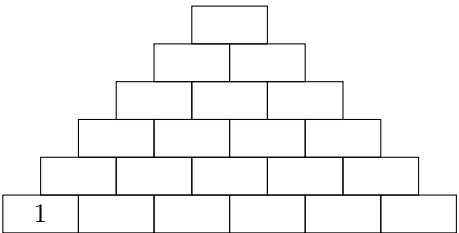
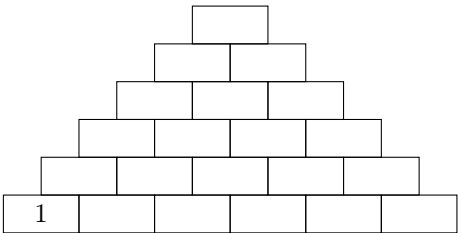
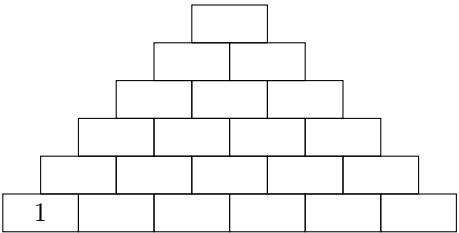
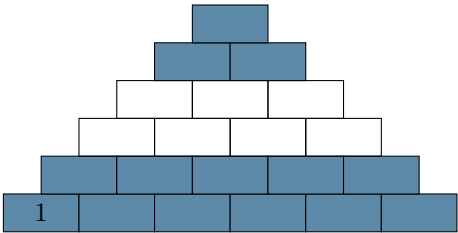


QUELQUES MOTIFS POSSIBLES (base 5, 2 couleurs)

POUR L'ANIMATEUR



QUELQUES MOTIFS POSSIBLES (base 6, 2 couleurs) POUR L'ANIMATEUR



QUELQUES MOTIFS POSSIBLES (base 7, 2 couleurs) POUR L'ANIMATEUR

TODO

QUELQUES MOTIFS POSSIBLES (base 8, 2 couleurs) POUR L'ANIMATEUR

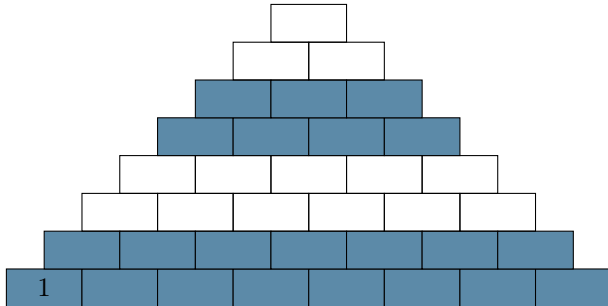


FIGURE 1 – Briques d'attente sur le motif de base

Au mieux, le nombre de briques d'attente
(briques avec des croix) =

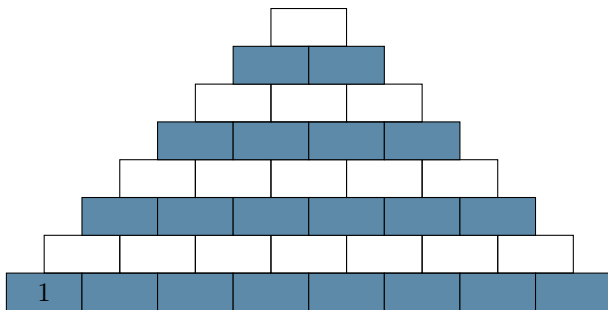


FIGURE 2 – Motif 1

Nombre de briques blanches = somme des
nombres pairs = $2+4+..+8 = 4(4+1) = 20$
On a $S_{pair}n = 2 + 4 + .. + 2n = n(n+1)$

Nombre de briques bleues = somme des
nombres impairs = $(1 + 3 + .. + 7) =$
 $(\frac{7+1}{2})^2 = 16$
On a $S_{impair}n = 1 + 3 + .. + n = (\frac{n+1}{2})^2$

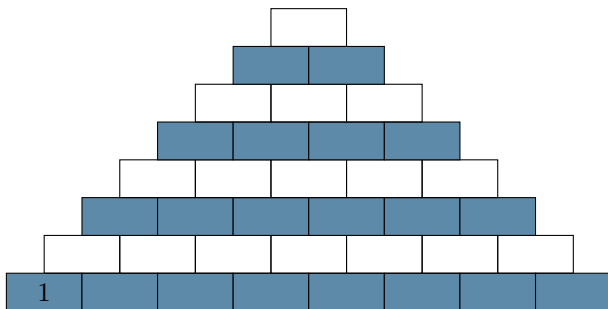


FIGURE 3 – Briques d'attente sur le motif 1

Au mieux, le nombre de briques d'attente
(briques avec des croix) =

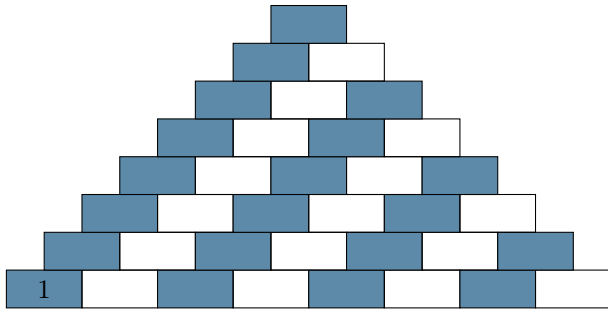


FIGURE 4 – Motif 2

Comme pour le motif 1

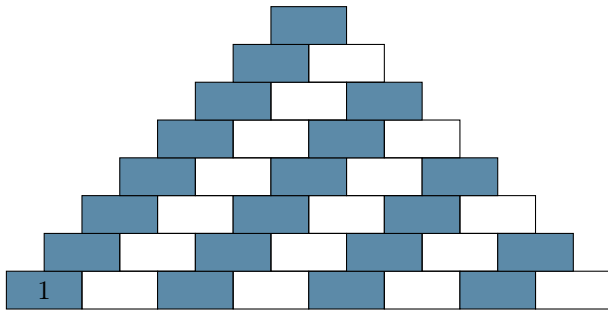


FIGURE 5 – Briques d'attente sur le motif 2

Au mieux, le nombre de briques d'attente
(briques avec des croix) =

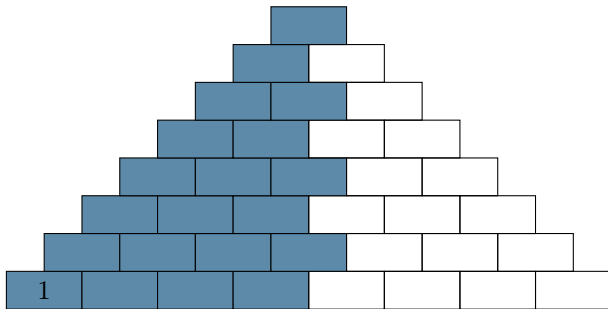


FIGURE 6 – Motif 3

Nombre de briques blanches = 16
Nombres de briques bleues = 20

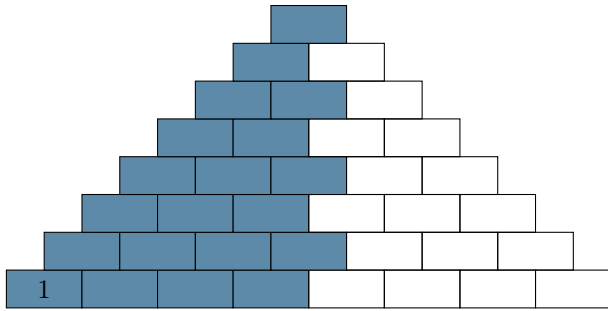


FIGURE 7 – Briques d’attente sur le motif 3

Au mieux, le nombre de briques d’attente (briques avec des croix) =

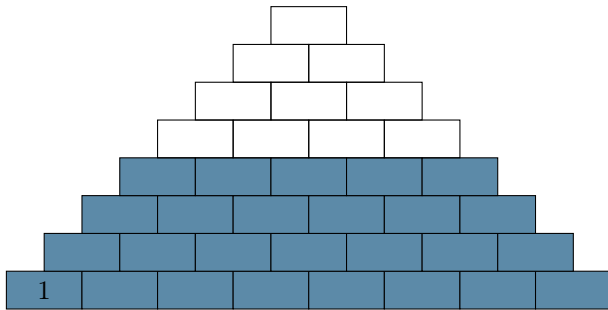


FIGURE 8 – Motif 4

Nombre de briques blanches = $(1 + 2 + \dots + 4) = \frac{4 \times 5}{2} = 10$

Nombre de briques bleues = $(5 + 6 + \dots + 8) = (1 + \dots + 8 - (1 + 2 + \dots + 4)) = 26$

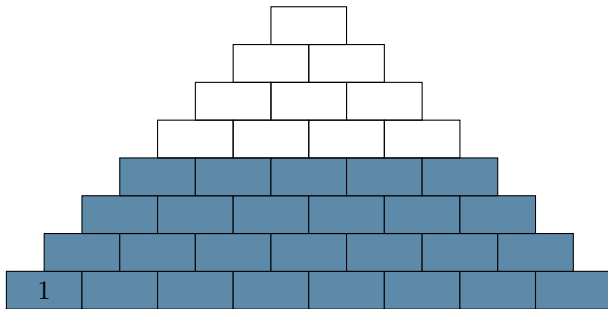


FIGURE 9 – Briques d’attente sur le motif 4

Au mieux, le nombre de briques d’attente (briques avec des croix) =

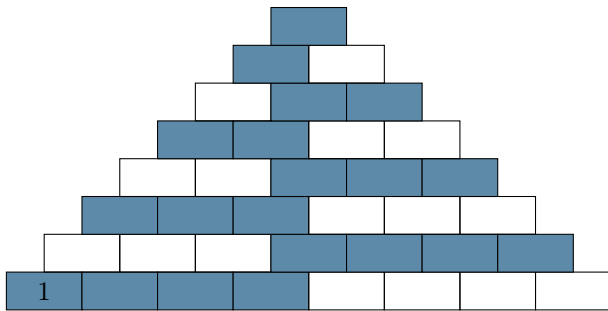


FIGURE 10 – Motif 5

Nombre de briques blanches =

Nombre de briques bleues =

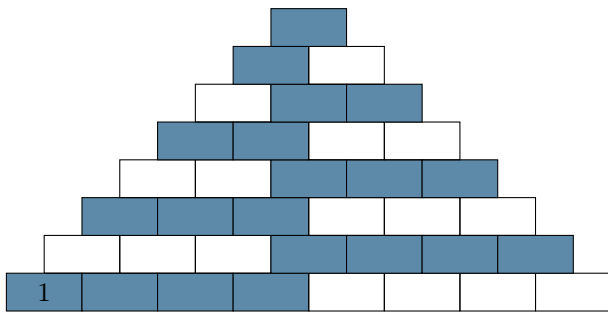


FIGURE 11 – Briques d'attente sur le motif 5

Au mieux, le nombre de briques d'attente
(briques avec des croix) =

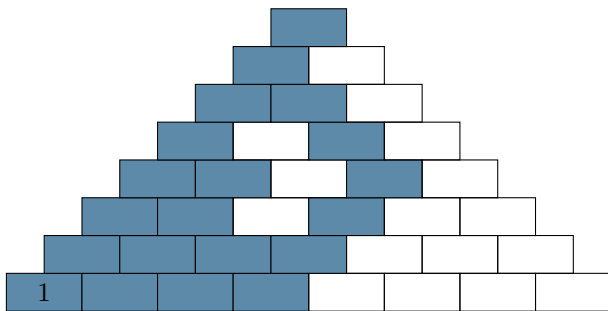


FIGURE 12 – Motif 6

Nombre de briques blanches =

Nombre de briques bleues =

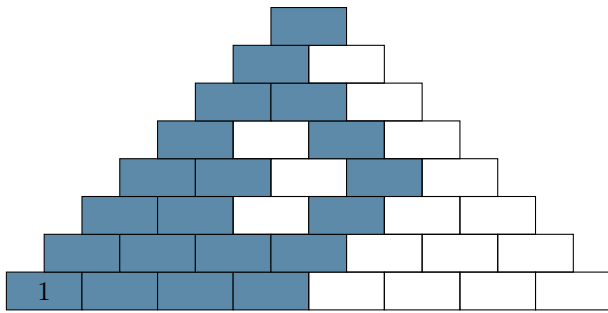


FIGURE 13 – Briques d'attentes sur le motif 6

Au mieux, le nombre de briques d'attente
(briques avec des croix) =

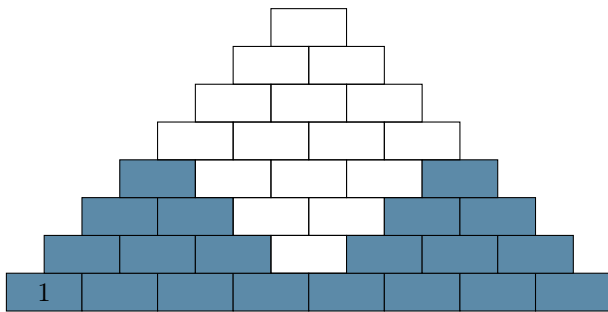


FIGURE 14 – Motif 7

Nombre de briques blanches =

Nombre de briques bleues =
 $2 \times (1 + 2 + \dots + 4) =$

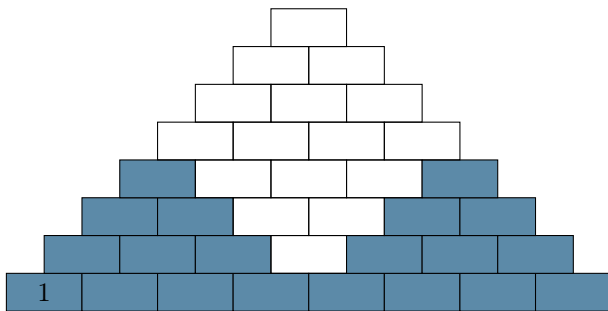


FIGURE 15 – Briques d'attentes sur le motif 7

Au mieux, le nombre de briques d'attente
(briques avec des croix) =

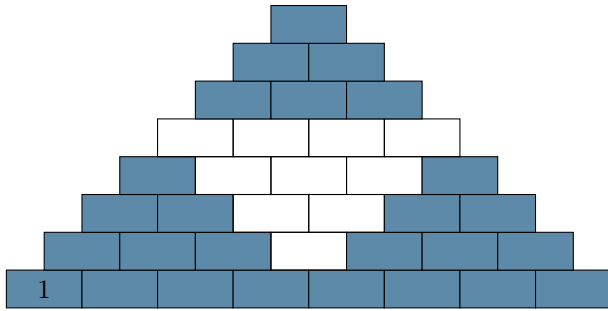


FIGURE 16 – Motif 8

Nombre de briques blanches =

Nombre de briques bleues =

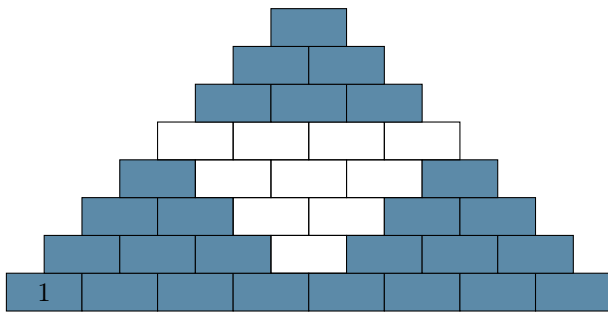


FIGURE 17 – Briques d'attente sur le motif 8

Au mieux, le nombre de briques d'attente
(briques avec des croix) =